Wohlfahrtsoptimum

Übungsblatt 1

1. Eine 2-Personen-2-Güter-Ökonomie ist mit $\bar{x} = 32$ und $\bar{y} = 36$ maximal konsumierbaren Einheiten ausgestattet. Die Präferenzen der beiden Individuen sind durch folgende Nutzenfunktionen gegeben:

$$u^A = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \qquad u^B = x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{4}}$$

(a) Leiten Sie die Gleichung der Kontraktkurve her und erläutern Sie deren Zweck.

$$\max u_A \quad NB: \; u_B = \bar{u}_B \quad \bar{x} = x_A + x_B \quad \bar{y} = y_A + y_B$$

Die Ressourcenbeschränkung kann man direkt in u_B einsetzen und man erhält

$$L(x_A, y_A, \lambda) = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} + \lambda((32 - x_A)^{\frac{3}{4}} \cdot (36 - y_A)^{\frac{1}{4}} - \bar{u}_B)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda\frac{3}{4}\left(\frac{36 - y_A}{32 - x_A}\right)^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda\frac{3}{4}\left(\frac{36 - y_A}{32 - x_A}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_A} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_A}{y_A}\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda\frac{1}{4}\left(\frac{32 - x_A}{36 - y_A}\right)^{\frac{3}{4}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x_A}{y_A}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda\frac{1}{4}\left(\frac{32 - x_A}{36 - y_A}\right)^{\frac{3}{4}} \tag{2}$$

Teilen von (1):(2) liefert

$$\frac{y_A}{x_A} = 3\left(\frac{36 - y_A}{32 - x_A}\right) \Rightarrow (32 - x_A)y_A = 3(36 - y_A)x_A \Rightarrow (3y_A + 32 - x_A)y_A = 108x_A \Rightarrow$$

$$y_A = \frac{54x_A}{16 + x_A}$$

Die Kontraktkurve gibt alle möglichen pareto-effizienten Aufteilungen von x und y an. Auf der Kontraktkurve gilt jeweils $GRS_A = GRS_B$.

(b) Skizzieren Sie die Kontrakkurve in einer Edgeworthbox. Siehe Excel

(c) Skizzieren Sie die Nutzenmöglichkeitskurve in einem u^A-u^B-Diagramm. Warum ist diese konkav? Siehe Excel. Die Konkavität der Nutzenmöglichkeitskurve folgt aus den jeweils positiven abnehmenden Grenznutzen und dem Homogenitätsgrad von 1 (entspricht konstanten Skalenerträgen bei einer Produktionsfunktion).
Analytisch: Einsetzen der Kontraktkurve in die Nutzenfunktionen (setze $x := x_A$ und $y := y_A$

$$u_A = \left(\frac{54x^2}{16 + x}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 54x^2 - u_A^2 x - 16u_A^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{u_A^2}{108} \pm \sqrt{\left(\frac{u_A^2}{108}\right)^2 + \frac{16}{54}u_A^2}$$

Da nur positive x sinnvoll sind, ist nur das $+$ der Lösung der quadratischen Gleichung zu verwenden und für die direkte Bestimmung der Nutzenmögllichkeitskurve setzt man dann

$$x = x_1(u_A) = \frac{u_A^2}{108} + \sqrt{\left(\frac{u_A^2}{108}\right)^2 + \frac{16}{54}u_A^2}$$

in u_B ein:

$$u_B(u_A) = \left((32-x)^3(36-y)\right)^{\frac{1}{4}} = \left((32 - x_1(u_A))^3(36 - \frac{54x_1(u_A)}{16+x_1(u_A)})\right)^{\frac{1}{4}}$$

Im folgenden gibt es soziale Planer mit verschiedenen Zielen. Berechnen Sie jeweils die optimalen Allokationen und Nutzenniveaus der Individuen A und B.

(d) Der Planer ist Utilitarist und verwendet $W = u^A + u^B$.

$$\max\{W(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + (32-x)^{\frac{3}{4}}(36-y)^{\frac{1}{4}}\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{36-y}{32-x}\right)^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{36-y}{32-x}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{3}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}\left(\frac{32-x}{36-y}\right)^{\frac{3}{4}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{32-x}{36-y}\right)^{\frac{3}{4}} \tag{4}$$

Wieder teilen von (3):(4) liefert die Kontraktkurve

$$y = \frac{54x}{16+x}$$

Einsetzen der Kontraktkurve in (3) liefert

$$\frac{1}{2}\left(\frac{54x}{x(16+x)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\left(\frac{36 - \frac{54}{(16+x)}}{32-x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(\frac{\frac{36(16+x)-54}{(16+x)}}{32-x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4}\left(\frac{18}{16+x}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{54^2}{(16+x)^2)} = \frac{3^4}{2^4}\frac{18}{16+x} \Rightarrow 32 = 16 + x \Rightarrow x^* = 16 \Rightarrow y^* = \frac{54 \cdot 16}{16+16} = 27$$

(e) Der Planer will die Nutzen nicht arithmetisch sondern eher geometrisch mitteln mit $W = u^A \cdot u^B$

$$\max\{W(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \cdot (32-x)^{\frac{3}{4}}(36-y)^{\frac{1}{4}}\}$$

Da genau wie in der reinen Nutzentheorie auch die Wohlfahrtstheorie ein ordinales Konzept ist, ist auch eine Wohlfahrtsfunktion nur eindeutig bis auf eine monotone Transformation. Zur deutlichen Vereinfachung der Rechnung, kann man deshalb W logarithmieren:

$$\tilde{W} = \ln W = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{2}\ln y + \frac{3}{4}\ln(32-x) + \frac{1}{4}\ln(36-y)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{32 - x} = 0 \tag{5}$$
$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{36 - y} = 0 \tag{6}$$

$$x^* = \frac{64}{5} \quad y^* = 24$$

Die Pareto-Effizienz ergibt sich ganz allgemein aus

$$\frac{\partial u_A u_B}{\partial x} = \frac{\partial u_A}{\partial x} u_B + \frac{\partial u_B}{\partial x} u_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_A}{\partial x} u_B = -\frac{\partial u_B}{\partial x} u_A \tag{7}$$
$$\frac{\partial u_A u_B}{\partial y} = \frac{\partial u_A}{\partial y} u_B + \frac{\partial u_B}{\partial y} u_A = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_A}{\partial y} u_B = -\frac{\partial u_B}{\partial y} u_A \tag{8}$$

Wieder teilen von (7):(8) liefert im Allgemeinen $GRS_A = GRS_B$

(f) Die Planerin hat *Theory of Justice* von Rawls gelesen und will $W = \min\{u^A, u^B\}$ maximieren.
Im Optimum muss $u_A = u_B$ gelten (geknickte Nutzen-Indifferenzkurven, wie bei perfekten Komplementen!). Der Maximalwert für den $u_A = u_B$ gilt, muß damit auch pareto-effizient sein, da jede Abweichung per se für A oder B eine Pareto-Verschlechterung sein muss. Das Optimum erhält man damit aus der Bedingung $u_A = u_B$ bei gleichzeitigem Einsetzen der Kontraktkurve. Damit ergibt sich:

$$\left(x\frac{54x}{16+x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left((32-x)^3(36 - \frac{54x}{16+x})\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{54^2x^4}{(16+x)^2} = \frac{18(32-x)^4}{16+x} \Rightarrow 54^2x^4 = 18(32-x)^4(16+x)$$

Dies liefert ein Polynom 5. Grades, welches nicht mehr geschlossen lösbar ist (im Allg. sind nur Polynome bis 4. Grades mit der Formel von Cardano-Ferrari noch zu lösen). Gelöst werden kann diese z.B. mit dem Newtonverfahren (iteratives Lösungsverfahren $f(x)$:=Polynom 5. Grades

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f(x_n)}$$

siehe Excel oder einfach einsetzes in jedem gängigen Mathematikprogramm:
z.B.
www.wolframalpha.com

solve(54ˆ2*xˆ4=18*(32-x)ˆ4*(16+x))

Als Lösung ergibt sich

$$x^* \approx 12,58 \quad y^* \approx 23,77$$

(g) Die letzte Planerin hat mit dem Chefökonomen von Google einen Kaffee getrunken und möchte eine neidfreie pareto-effiziente und damit faire Allokation gemäß H.R. Varian implementieren. Sind die vorher bestimmten Allokationen fair?
Die Pareto-Effizienz ist vorher schon allgemein gezeigt worden. Für eine faire Allokation muss außerdem gelten, dass die Allokation neidfrei ist. Dafür setzt man einmal die optimale Allokation in die Nutzenfunktionen ein und tauscht dann die Allokationen zwischen A und B. Tabelle siehe Excel.

Hinweise:
(c) lässt sich in Tabellenform einfach grafisch darstellen (z.B. Excel) 1. x=0..32 2. Kontraktkurve ergibt die zugehöhrigen y-Werte 3. Berechnung von u^A 4. über $x^B = 32 - x^A$ $y^B = 36 - y^A$ berechnen des zughörigen u^B-Wertes. Eine analystische Lsg. ist auch mögchlich, aber relative aufwendig.
(d) schreiben Sie das Maximierungsproblem sauber auf. Berechnung wie in Mirko (e) überlegen Sie, wie man die Wohlfahrtsfunktion transformieren kann, um die Rechnung stark zu vereinfachen (f) Maximierung wie bei komplementären Gütern in Mikro. Führt auf Polynom 5. Grades. Lösung z.B. per Newtonverfahren in Excel. Beim Vergleich der originären Nutzenwerte u_A, u_B und der getauschten Nutzenwerte $T - u_A, T - u_B$ erkennt man, dass B A immer beneidet.