Öffentliche Finanzen und Außenwirtschaft Wintersemester 2022

Tutorium 1

1. Wiederholen Sie die Rechenregeln für Potenzfunktionen und Logarithmusfunktionen:

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \frac{x^m}{x^n} = \left(\frac{x}{x}\right)^{m-n} \quad (xy)^n = x^n y^n \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$\ln(1) = 0 \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \ln(x^n) = n \ln x$$

2. Gegeben sind folgende Funktionen

$$f(x) = a + bx \quad f(x) = \sqrt{x} \quad f(x) = x^2 \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = x^\alpha \quad f(x) = \ln x$$

   (a) Stellen Sie die Funktionen für $x > 0$ und verschiedene Parametergrößen a, b, α grafisch dar.
   Siehe Excel

   (b) Bestimmen Sie die 1. und 2. Ableitungen der Funktionen.

$$\begin{aligned}
&f(x) = a + bx \quad f'(x) = b \quad f''(x) = 0 \\
&f(x) = \sqrt{x} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
&f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2 \\
&f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \\
&f(x) = x^\alpha \quad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad f''(x) = (\alpha - 1)\alpha x^{\alpha-2} \\
&f(x) = ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

   (c) Geben Sie einige ökonomische Anwendungen für die Funktionen.

   - $f(x) = a + bx$: Angebots- Nachfragefunktion, Kostenfunktion, alle linearisierten Zusammenhänge
   - $f(x) = \sqrt{x}$: Produktionsfunktion, Angebotsfunktion, allgemeine Zusammenhänge mit positiven abnehmenden Grenzerträgen (generelles ökonomisches Ertragsgesetz)
   - $f(x) = x^2$: Schadensfunktionen werden häufig quadratisch angenommen (vgl. Varianz in der Statistik!), Kostenfunktion (zunehmende Grenzkosten, abgeleitet aus abnehmender Grenzproduktivität, siehe $\sqrt{x}$)
   - $f(x) = \frac{1}{x}$: Nachfragefunktion, insbesondere Nachfrageelastitzität von 1 (z.B. erhält man diesen funktionalen Zusammenhang aus der Nutzenmaximierung mit Cobb-Douglas-Nutzenfunktion!)

- $f(x) = x^\alpha$: Quasi alle ökonomischen Zusammenhänge, je nach Wahl von α. Dieser Funktionstyp ist quasi das allgemeine Arbeitspferd der Ökonomen!
- $f(x) = \ln(x)$: Nutzenfunktion, Produktionsfunktion (ab x>1) (ähnlich wie bei $\sqrt{x}$ positive abnehmenden Grenzerträge, Linearisierung von multiplikativen Zusammenhängen (siehe Rechenregeln für den Logarithmus)

3. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$F(x,y,z) = \frac{x^\alpha y^\beta}{z^\gamma} \quad F(K,L) = \sqrt{KL}$$

$$\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x} = \alpha \frac{x^{\alpha-1}y^\beta}{z^\gamma} \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y} = \beta \frac{x^\alpha y^{\beta-1}}{z^\gamma} \qquad \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z} = -\gamma \frac{x^\alpha y^\beta}{z^{\gamma+1}}$$
$$\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} = \sqrt{L}\frac{1}{2\sqrt{K}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}} \qquad \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}$$

4. Definieren Sie das totale Differential einer Funktion abhängig von zwei Variablen im Speziellen und einer vektorwertigen Funktion im Allgemeinen:

$$F(x_1,x_2) \quad F(x_1,x_2,...,x_n)$$

Das totale Differential repräsentiert die komplette Änderung einer mehrdimensionalen Funktion, wenn man alle Variablen gleichzeitig ändert, so wie die erste Ableitung einer eindimensionalen Funktion die Änderung der Funktion selbst repräsentiert. Da wir naturgemäß in der Ökonomie Zusammenhänge untersuchen, die viele Einflussfaktoren haben, kommt dem totalen Differential in der quantitativen Analyse eine fundamentale Bedeutung zu. Technisch berechnet man einfach jede partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ einer mehrdimensionalen Funktion, multipliziert jede partielle Ableitung mit der Änderung der Variablen dx_i und summiert alles auf (vergleiche im Eindimensionalen $f'(x)dx$: $f'(x)$ bedeutet dabei in welche Richtung man sich bewegt und dx, wie weit man auf der x-Achse nach rechts wandert). Letztlich ist das totale Differential damit eine Vektoraddition, damit man weiß, wo man nachher im Funktionengebirge herauskommt :-). Formal ergibt sich dann

$$dF(x_1,x_2) = \frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F(x_1,x_2)}{\partial x_2}dx_2 \quad \text{bzw.} \quad dF(x_1,x_2,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_i}$$

5. Bestimmen Sie das totale Differential der Funktionen

$$u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} \quad F(K,L) = \sqrt{KL}$$

$$du(x_1,x_2) = \alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}dx_1 + (1-\alpha)x_1^\alpha x_2^{-\alpha}dx_2 = \alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}dx_1 + (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}dx_2$$

Setze $\alpha = \frac{1}{2}$ $x_1 = K$ und $x_2 = L$ und man sieht, dass $F(K,L) = \sqrt{KL}$ nur ein Spezialfall von $u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ ist:

$$dF(K,L) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}dK + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}dL$$

(a) Setzen Sie jeweils die totale Änderung dU und dF gleich null und lösen Sie nach $\frac{dx_2}{dx_1}$ bzw. $\frac{dK}{dL}$ auf. Interpretieren Sie die Ergebnisse ökonomisch, indem Sie u als Nutzenfunktion und F als Produktionsfunktion interpretieren.
Mit den partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ und den Differentialen dx_i darf man rechnen wie mit Variablen! Damit ergibt sich:

$$du(x_1,x_2) = 0 = \alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} dx_1 + (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} dx_2 \Rightarrow -\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} dx_1 = (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} dx_2$$

$$\Rightarrow -\frac{\alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha}} = \frac{dx_2}{dx_1} \Rightarrow -\frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{dx_2}{dx_1}$$

$$dF(K,L) = 0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}dK + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}dL \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}}dK = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}dL \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{K}{L}$$

Die Rechnung für u ergibt die Grenzrate der Substitution (vgl. Haushaltstheorie: Steigung der Indifferenzkurve = Preisverhältnis) und die Rechung für F die Grenzrate der technischen Sustitution (vgl. Unternehmenstheorie: Steigung der Isoquante = Faktorpreisverhältnis)

6. Bestimmen Sie die Bedingung erster Ordnung für ein mögliches Extremum der Funktion $y(L) = p\sqrt{K(L+a)} - (wL + rK)$ $p, a, w, r, K > 0$
$y'(L) = 0 \to \frac{pK}{2\sqrt{K(L+a)}} = w$ Wertgrenzprodukt der Arbeit L gleich Lohn der Arbeit w.

7. Bestimmen Sie die Bedingungen erster Ordnung für ein Maximum der Funktion $\pi(K,L) = p\sqrt{KL} - (rK + wL)$ $(p, r, w > 0)$.
$p\frac{\partial F}{\partial K} = p\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{K}} = r$ und $p\frac{\partial F}{\partial L} = p\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} = w$ Wertgrenzprodukt gleich Preis des Inputfaktors.

8. Gegeben ist die Funktion $f(x,y,z) = \frac{xy}{z}$. Bestimmen Sie das totale logarithmische Differential von f und interpretieren Sie dieses ökonomisch.
$dln(f(x,y,z)) = \frac{df}{f} = dln\left(\frac{xy}{z}\right) = dlnx + dlny - dlnz = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} - \frac{dz}{z}$
Damit ergibt sich ceteris paribus jeweils die Elastizität von f bzgl. der Variablen x, y, z. Z.B. für $y = z = const.$

$$\epsilon_{xf} = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\text{relative Änderung von } f}{\text{relative Änderung von } x}$$

Umgangssprachlich: Um wie viel Prozent ändert sich f, wenn sich x um ein Prozent ändert. Bei einem multiplikativen Zusammenhang, kann man die Gleichung durch logarithmieren nicht nur linearisieren, sondern die Koeffizienten vor den Summanden lassen sich gleichzeitig auch ökonomisch sinnvoll als Elastizitäten interpretieren!

9. Ein Konsument mit einer Nutzenfunktion von $u(x_1,x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ verfügt über ein Einkommen von $m > 0$, dass er für den Kauf von zwei Gütern zum Preis von $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$ ausgeben kann.

(a) Stellen Sie grafisch die Budgetmenge dar.
Siehe Excel

(b) Stellen Sie grafisch die Indifferenzkurven dar.
Siehe Excel

(c) Bestimmen Sie das Haushaltsoptimum über

i. das Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren

$$\max_{x_1,x_2}\{u(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}\} \quad NB: m = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\Rightarrow L(x_1,x_2,\lambda) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \qquad \alpha\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1-\alpha} = \lambda p_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \qquad (1-\alpha)\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha} = \lambda p_2 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \tag{3}$$

Teile (1):(2) und es ergibt sich (vgl. totales Differential der Nutzenfunktion!):

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\cdot\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow p_1x_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}p_2x_2 \tag{4}$$

Einsetzen von (4) in (3) liefert

$$m - \frac{\alpha}{1-\alpha}p_2x_2 - p_2x_2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + 1\right)p_2x_2 = m \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha}\right)p_2x_2 = m$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha+1-\alpha}{1-\alpha}\right)p_2x_2 = m \Rightarrow x_2^* = (1-\alpha)\frac{m}{p_2}$$

Die äquivalente Rechnung ergibt

$$x_1^* = \alpha\frac{m}{p_1}$$

bzw. kann man sich durch einfache Symmetrieüberlegungen klar machen, dass man für x_1 nur den Index 1 mit 2 aus α mit $1-\alpha$ austauschuen muss!

ii. das Einsetzungsverfahren
Bei diesem einfachen Zusammenhang kann man die Nebenbedingung auch in die Nutzenfunktion einsetzen und man erhält ein eindimensionales Optimierungsproblem (häufig sind die Zusammenhänge aber nur implizit gegeben, bzw. lassen sich die Gleichungen nicht auflösen, bzw. bekommt man bei n Dimensionen auch Probleme):

$$m = p_1x_1 + p_2x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1 \text{ (Geradengleichung der Budgetgeraden)}$$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2(x_1)) = u(x_1) = x_1^\alpha\left(\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2}x_1\right)^{1-\alpha}$$

unter Verwendung von Produkt und Kettenregel

$$\Rightarrow u'(x_1) = \alpha x_1^{\alpha-1} \Bigg(\underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \Bigg)^{1-\alpha} - x_1^{\alpha}(1-\alpha)\frac{p_1}{p_2} \Bigg(\underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \Bigg)^{-\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha x_1^{\alpha-1} \Bigg(\underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \Bigg)^{1-\alpha} = x_1^{\alpha}(1-\alpha)\frac{p_1}{p_2} \Bigg(\underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \Bigg)^{-\alpha}$$

$$\Rightarrow \Bigg(\underbrace{\frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1}_{x_2} \Bigg)^{1-\alpha+\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2} x_1^{\alpha-(\alpha-1)}$$

Exponenten kürzen sich und p_2 kürzt sich und alles löst sich in Wohlgefallen auf :-)

$$\Rightarrow m - p_1 x_1 = \frac{1-\alpha}{\alpha} p_1 x_1 \Rightarrow x_1^* = \alpha \frac{m}{p_1}$$

iii. die Bedingung *Grenzrate der Substitution = Preisverhältnis*
Diese Optimalitätsbedingung kennen Sie aus der Mikro und dankenswerterweise kann man sie auch ganz ohne Mathematik ableiten. Wir steigen aber damit ein und können also gleich unser Ergebnis aus dem totalen Differential für u verwenden:

$$\left| \frac{dx_2}{dx_1} \right| = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

was wiederum nichts anderes ist als (4) aus der Lagrangeoptimierung, weswegen wir uns hier den Rest der Rechnung sparen.

10. Die Produktionsmöglichkeiten für zwei Güter $A, B > 0$ mit den Preisen $p_A > 0$ und $p_B > 0$ in einem Land sind gegeben durch $B(A) = \sqrt{4 - A^2}$

   (a) Stellen Sie $B(A)$ im positiven Quadranten grafisch im $B - A$-Diagramm dar.
   Siehe Excel. Wer es genauer wissen will: Das ganze ist eine Kreisgleichung. Quadrieren liefert:

   $$A^2 + B^2 = 4$$

   also nichts anderes, als den guten alten Pythagoras, wenn man $2 = C$ setzt :-) Ist aber hier nicht so wichtig!

   (b) Formulieren Sie bei gegebenen Verkaufsmengen A und B die Erlösfunktion $e(A, B)$.
   Hier wird es spannend, denn hoffentlich nehmen ein paar Leute mit, dass jetzt konzeptionell nichts anderes kommt, als bei der Haushaltsoptimierung. In der Vorlesung mache ich dies sowohl be Ricardo, als auch beim Modell spezifischer Faktoren!
   Erlösfunktion = Wieviel nehme ich ein, wenn ich bestimmte Mengen von A und B verkaufe = Umsatz des Landes

   $$e(A, B) = p_A A + p_B B \quad \text{vgl. Budgetgerade in der Haushaltsoptimierung!}$$

(c) Stellen Sie für gegebenen Erlös $e = \bar{e}$ den Erlös im $B - A$-Diagramm dar. Siehe Excel $->$ Budgetmenge

(d) Maximieren Sie den Erlös, gegeben die die Produktionsbedinungen $B(A) = \sqrt{2 - A^2}$

i. das Verfahren der Lagrangeschen Multiplikatoren

$$\max_{A,B}\{e(A,B) = p_A A + p_B B\} \quad NB: B = \sqrt{4 - A^2}$$

$$\Rightarrow L(A, B, \lambda) = p_A A + p_B B + \lambda(\sqrt{4 - A^2} - B)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A} = p_A - \lambda \frac{A}{\sqrt{4 - A^2}} = 0 \Rightarrow \qquad p_A = \lambda \frac{A}{\sqrt{4 - A^2}} \tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = p_B - \lambda = 0 \Rightarrow \qquad p_B = \lambda \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sqrt{4 - A^2} - B = 0 \tag{7}$$

Teile (5):(6) und es ergibt sich :

$$\frac{A}{\sqrt{4 - A^2}} = \frac{p_A}{p_B} \Rightarrow A^2 = (4 - A^2)\left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \Rightarrow A^2\left(1 + \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2\right) = 4\left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2 \tag{8}$$

Kürzen mit dem Preisverhältnis und Wurzelziehen liefert:

$$\Rightarrow A^* = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^2}}$$

und einsetzen in die Nebenbedigung

$$\Rightarrow B^* = \sqrt{4 - \frac{4}{1 + \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{p_A}{p_B}\right)^2}}$$

Auch dieses Ergebnis kann man rein aus der Symmetrieüberlegung her bekommen, dass nämlich die Nebenbedingung (ein Kreis) vollkommen symmetrisch ist, genauso, wie die Zielfunktion symmetrisch in A, B ist und man damit für das Ergebnis ebenso nur A und B vertauschen muss.

ii. das Einsetzungsverfahren
Wieder einfach nur die Nebenbedingung in $e(A, B)$ einsetzen, und man erhält nur eine Funktion von A

$$e(A, B(A)) = p_A A + p_B\sqrt{4 - A^2} = e(A) \quad \Rightarrow \quad e'(A) = p_A - p_B\frac{A}{\sqrt{4 - A^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{p_A}{p_B} = \frac{A}{\sqrt{4 - A^2}}$$

Rest siehe (8)

iii. die Bedingung
Steigung der Kurve der Produktionsmöglichkeiten $B(A) =$ *-Preisverhältnis*
Konzeptionell schiebt man hier, gegeben die Produktionsbedingungen (Kreis) die Erlösfunktion soweit nach außen wie möglich und dann muss eben im Optimum gelten, dass die Steigung der Produktionsmöglichkeiten (den begriff Transformationkurve, kennen diejenigen, die bei mir kein Makro gemacht haben noch nicht!) der Steigung der Erlösgeraden entsprechen muss

$$\frac{dB}{dA} = -\frac{p_A}{p_B}$$

und wieder erhalten wir

$$\frac{dB}{dA} = B'(A) = -\frac{A}{\sqrt{4 - A^2}} = -\frac{p_A}{p_B}$$