Man maximiert den Nutzen von A unter der Nebenbedingung, dass sich der Nutzen von B nicht ändert und der allgemeinen Ressourcenbeschränkung, mit dem Unterschied, dass es jetzt nicht zwei private Güter gibt, sondern ein privates x und ein öffentliches G. Den Preis des privaten Gutes normieren wir auf 1 (sie wissen, in der Klassik kommt es immer nur auf die relativen Preise an!) und in Einheiten des privaten Gutes ist der Preis des öffentlichen Gutes c. Die individuell konsumierten Mengen des privaten Gutes müssen wir jeweils mit dem Index A und B versehen, denn die Menge x_A die A konsumiert kann B nicht mehr konsumieren (Rivalität in der Nutzung!). Die konsumierte Menge G bekommt dagegen keinen Index, denn die Menge G die A konsumiert kann gleichzeitig auch B konsumieren. Die Individuen verfügen einzeln jeweils über ein privates Budget y_A und y_B, zusammen gibt es also in der Gesellschaft ein Ausgangsbudget von $y_A + y_B$
Achtung!! $\bar{u}_B$, y_A, y_B sind alles feste Zahlen
Das Optimierungsproblem ergibt sich dann formal zu:

$$\max u_A(x_A, G) \quad NB1: u_B(x_B, G) = \bar{u}_B \quad NB2: \quad x_A + x_B + cG = y_A + y_B$$

Prinzipiell ist dies ein Optimierungsproblem mit zwei Nebenbedingungen und drei Unbekannten x_A, x_B, G

Zur allgemeinen Lösung dieses Optmierungsproblems verwenden wir den Formalismus von Lagrange. D.h. als erstes stellen wir die Nebenbedingungen so um, dass sie alle Null ergeben:

$$NB1: u_B(x_B, G) - \bar{u}_B = 0 \quad NB2: y_A + y_B - x_A - x_B - cG = 0$$

Als nächstes multiplizieren wir beide Nebenbedigungen mit willkürlichen Zahlen (lagrangesche Multiplikatoren) μ und λ und addieren dann quasi "0" zu der zu maximierenden Funktion u_A hinzu und erhalten dann die Lagrangefunktion mit 5 Unbekannten $x_A, x_B, G, \mu, \lambda$

$$L(x_A, x_B, G, \mu, \lambda) = u_A(x_A, G) + \overbrace{\mu(u_B(x_B, G) - \bar{u}_B)}^{0} + \overbrace{\lambda(y_A + y_B - x_A - x_B - cG)}^{0}$$

Als partielle Ableitungen und anschließendes Nullsetzes für die Maximierung von L erhält man (Bitte erst einmal selber versuchen!!!)

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{\partial u_A}{\partial x_A} - \lambda = 0 \Rightarrow \qquad \tfrac{\partial u_A}{\partial x_A} = \lambda \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_B} = \mu \frac{\partial u_B}{\partial x_B} - \lambda = 0 \Rightarrow \qquad \mu \tfrac{\partial u_B}{\partial x_B} = \lambda \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial u_A}{\partial G} + \mu \frac{\partial u_B}{\partial G} - \lambda c = 0 \Rightarrow \quad \tfrac{\partial u_A}{\partial G} + \mu \tfrac{\partial u_B}{\partial G} = \lambda c \tag{3}$$

Die Ableitungen nach μ und λ und "Nullsetzen" ergeben natürlich einfach nur die beiden Nebenbedingungen NB1 und NB2:

$$NB1 : u_B(x_B, G) = \bar{u}_B \quad NB2 : y_A + y_B = x_A + x_B + cG$$

Allerdings benötigen wir die Nebenbedigungen nicht mehr zur Ableitung der Samuelsonbedingung! In konkreten Beispielen sind sie dafür nötig, um die optimale Menge des öffentlichen Gutes G konkret auszurechnen

Es geht nun darum aus dem Gleichungssystem λ und μ zu eliminieren. Dafür benötigt man etwas Routine, aber letztlich sind die Rechenschritte bei allen formalen ökonomischen Optimierungsaufgaben sehr ähnlich oder sogar gleich! Teilen von (1):(2) liefert

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\mu \frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = \mu \tag{4}$$

Mit (1) und (4) haben wir damit zwei konkrete Ausdrücke für λ und μ. Diese setzen wir in (3) ein und erhalten:

$$\frac{\partial u_A}{\partial G} + \overbrace{\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}}^{\mu} \frac{\partial u_B}{\partial G} = \overbrace{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}^{\lambda} c \tag{5}$$

Teilen durch $\frac{\partial u_A}{\partial x_A}$ liefert dann

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial G}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}} + \frac{\frac{\partial u_B}{\partial G}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = c \tag{6}$$

Sie erinnern sich: Die Verhältnisse der Grenznutzen zueinander sind nichts anderes als die Grenzraten der Substitution (GRS) und c ist in unserer Modellierung nichts anderes als die Grenzkosten (GK) des öffentlichen Gutes G und wir erhalten:

$$\overbrace{\frac{\frac{\partial u_A}{\partial G}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}}^{GRS_A} + \overbrace{\frac{\frac{\partial u_B}{\partial G}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}}^{GRS_B} = \overbrace{c}^{GK} \quad \Rightarrow \quad GRS_A + GRS_B = GK \tag{7}$$

Voila, die Samuelsonbedingung so wie sie 1954 hergeleitet worden ist!