**Öffentliche Finanzen und Außenwirtschaft Sommersemester 2021**

# Tutorium 3

1. Für das Hafenfest der Jade Hochschule wird für das leibliche und seelische Wohl geplant. Für das Gemüt soll ein Feuerwerk stattfinden, und für den Hunger soll es Pizzastücke geben. Grundsätzlich lassen sich unter den Studierenden zwei Gruppen $A$ und $B$ identifizieren mit folgenden Präferenzen für Pizza ($x$) und Feuerwerk ($G$):

$$u_A = lnx_A + 2lnG \qquad u_B = 2lnx_B + lnG$$

Der hauptamtliche Vizepräsident der Hochschule sieht sich Kosten von 1 Euro für ein Pizzastück $x = 1$ und 1 Euro für eine Rakete $G = 1$ bei einem Budget von 9000 Euro gegenüber.

(a) Bestimmen Sie die Transformationskurve für die beiden Güter Pizza und Feuerwerk.
Gemäß der Kosten stehen die beiden Güter Pizza und Feuerwerk im Austauschverhältnis 1:1. Bei einem Budget von 9000 Euro ergibt sich damit eine lineare Transformationskurve, die die beiden Achsen gerade in den Punkten (0,9000) und (9000,0) schneidet. Siehe Excel. Die Grenzkosten der Bereitstellung des öffentlichen Guts (Feuerwerk) liegen damit bei 1 Einheit des privaten Gutes Pizza. Nochmal auf die Definition eines öffentlichen Gutes (nicht ausschließbar, nicht rivalisierend eingehen).

(b) Nehmen Sie an, der Kanzler verwendet als Zielfunktion $W = u_A + u_B$. Welche Allokation von $x_A, x_B, G$ stellt er dann für das Hafenfest bereit?
Die Ressourcenbeschränkung liegt weiterhin bei 9000 Euro. Damit handelt es sich hierbei wiederum um ein Optimierungsproblem unter einer Nebenbedingung:

$$\max_{x_A, x_B, G} \{u_A + u_B = lnx_A + 2lnG + 2lnx_B + lnG\} \qquad NB: 9000 = G + x_A + x_B$$

für die Lagrangefunktion und deren Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned} L(x_A, x_B, G) = lnx_A + 2lnx_B + 3lnG + \lambda(9000 - G - x_A - x_B) \\ \frac{\partial L}{\partial x_A} = \frac{1}{x_A} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_B} = \frac{2}{x_B} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial G} = \frac{3}{G} - \lambda = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit der Nebenbedingung:

$$\frac{1}{x_A} = \frac{2}{x_B} = \frac{3}{G} \Longrightarrow x_B = 2x_A \quad G = 3x_A \Longrightarrow 9000 = G + G$$

$$G^* = 4500 \quad x_B^* = 3000 \quad x_A^* = 1500$$

(c) Ist diese Allokation pareto-effizient (Samuelsonbedingung)?
Man bestimme die allgemeine Samuelsonbedingung und setze dann das Ergebnis von (b) ein.

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial G}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}} + \frac{\frac{\partial u_A}{\partial G}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}} = GK = 1 = \frac{\frac{2}{G}}{\frac{1}{x_A}} + \frac{\frac{1}{G}}{\frac{2}{x_B}} = \frac{\frac{2}{4500}}{\frac{1}{1500}} + \frac{\frac{1}{4500}}{\frac{2}{3000}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Damit ergibt sich eine pareto-effiziente Lösung.

(d) Nehmen Sie an beide Gruppen $A$ und $B$ hätten jeweils die Hälfte des Budgets von $m = 4500$ zur Verfügung. Bestimmen Sie allgemein die individuellen Nachfragen für das Feuerwerk in Abhängigkeit vom Preis $p_G$. Bestimmen Sie anschließend gemäß der Eigenschaften für öffentliche Güter die aggregierte Nachfrage und berechnen Sie aufgrund des hypothetischen Marktgleichgewichts den Umfang des Feuerwerks. Warum wird sich dieses Marktgleichgewicht im Allgemeinen nicht einstellen?
Formal ergibt sich dadurch ein normales Nutzenmaximierungsproblem mit Cobb-Douglas-Nutzenfunktion (u=$lnx_A + 2lnG$ ist nur eine monotone Transformation von $\tilde{u} = x_A^{\frac{1}{3}} G^{\frac{2}{3}}$/ analoges gilt für $B$) und der Nebenbedingung $m = p_A x_A + p_G G$. Die Lösung ist dann (s. Mikro) $G(p_G) = \frac{2}{3p_G}4500$ für Individuum $A$ und $G(p_G) = \frac{1}{3p_G}4500$ für Individuum $B$ (dieses Ergebnis braucht man nicht mehr Herleiten, sondern kann aus der Mikro vorausgesetzt werden). Da jede durch Individuum $A$ nachgefragte Einheit von $G$ auch von $B$ genutzt werden kann, muss man für die Aggregation bei gegebener Menge jeweils die Zahlungsbereitschaften addieren (horizontale Aggregation!). Für die Aggregierte Nachfrage ergibt sich dann:

$$G_{aggregiert} = \frac{2}{3p_G} + \frac{1}{3p_G}4500 = \frac{4500}{p_G}$$

Für das hypothetischen Marktgleichgewicht setzt man dann Preis gleich Grenzkosten $p_G = GK = 1$ und erhält damit ebenso für die pareto-effiziente Menge des Feuerwerks $G^* = 4500$. Allerdings müßte man zur Erreichung dieses hypothetischen Marktgleichgewichts einen Mechanismus etablieren, der garantiert, bei den beiden Individuen die unterschiedliche Zahlungsbereitschaft abzuschöpfen. Ohne einen solchen Mechanismus, wird es in der Regel zu einer Unterversorgung im privaten Marktprozess mit dem öffentlichen Gut kommen, da im normalen Marktprozess sich beide Individuen bewusst, dass jede Rakete die sie bezahlen auch vom anderen genutzt werden kann. (Grafik s. Excel)

(e) Unterstützen Sie ihre Rechnungen mit Grafiken.

2. Ein Land produziert zwei Güter $A, B$ mit identischen Produktionsfunktionen unter vollkommener Konkurrenz.

$$A = \sqrt{KL} \quad B = \sqrt{KL}$$

allerdings mit unterschiedlichen spezifischen Kapitalausstattungen $K_A = 1$ und $K_B = 4$. Für den flexiblen Faktor Arbeit steht die Menge $\bar{L} = 1$ zur Verfügung. Außerdem ist is $p_A = 4$ und $p_B = 3$.

(a) Bestimmen Sie Grenzproduktivitäten der Produktionsfunktionen bzgl. der Arbeit

$$\frac{\partial A}{\partial L} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{L}}$$

(b) Bestimmen Sie Skalenerträge der Produktionsfunktionen.

$$\sqrt{(\alpha K)(\alpha L)} = \alpha\sqrt{KL}$$

Damit ergeben sich konstante Skalenerträge (z.B. Vervierfachung der Inputs führt zu einer Vervierfachung des Outputs).

(c) Bestimmen Sie die Transformationskurve.
Setze die im Sektor $A$ eingesetzte Arbeit gleich $L = L_A$. Dann verbleibt für den Sektor $B$ das Arbeitsvolumen $L_B = 1 - L$. Zwischenüberlegung: Warum wird immer die maximal mögliche Arbeit eingesetzt, gegeben die Arbeitsmenge im anderen Sektor? Die Produkionsfunktion hat die Eigenschaft der Nicht-Sättigung (streng monoton steigend). Damit ist immer der maximale Arbeitsinput effizient (Mikro!). Gleiches gilt für den Kapitaleinsatz. Da Kapital in dieser Aufgabe ein sektorspezifischer Faktor ist, wird er jeweils voll ausgenutzt. Damit ergibt sich:

$$A = \sqrt{L} \Longrightarrow A^2 = L \quad B = 2\sqrt{1-L} \Longrightarrow B = 2\sqrt{1-A^2}$$

Die Transformationskurve gibt an, wie sich in effizienter Weise $A$ in $B$ umwandeln lässt. Die Steigung (Grenzrate der Transformation: GRT) der Transformationskurve gibt an, auf wieviel von Gut $B$ man versichten muss, wenn man eine zusätzliche Einheit von $A$ produzieren möchte (vgl. Opportunittskosten und GRS aus Mikro!)

(d) Welcher Lohn stellt sich am Arbeitsmarkt ein und welche gewinnoptimalen Mengen ergeben sich damit unter Autarkie für $A$ und $B$?
Da nur Arbeit variabel ist, ergibt die Gewinnmaximierung (vollkommene Konkurrenz, dann sind die Preise für die Unternehmen gegeben!):

$$\pi_A = p_A A - wL_A = 4\sqrt{L_A} - wL_A \Longrightarrow \pi'(L_A) = \frac{4}{2\sqrt{L_A}} - w = 0 \Longrightarrow w = \frac{4}{2\sqrt{L_A}}$$

Analog für Sektor $B$

$$w = \frac{3}{\sqrt{L_B}}$$

Gleichsetzen und verwenden der Arbeitsmarktrestriktion $L_B = 1 - L_A = 1 - L$ liefert

$$2\sqrt{1-L} = 3\sqrt{L} \Longrightarrow L^* = L_A^* = \frac{4}{13} \Longrightarrow w^* = \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{13}}} = \sqrt{13}$$

Einsetzen von $L^*$ in die Produktionsfunktionen liefert:

$$A^* = \sqrt{\frac{4}{13}} \quad B^* = 2\sqrt{\frac{9}{13}}$$

(e) Bestimmen Sie den Autarkie-Produktionspunkt außerdem über die Einkommensmaximierung unter gegebenen Produktionsbedingungen.
Das Maximierungsproblem ist allgemein gegeben durch

$\max\{m = p_A A + p_B B\}$ NB: Produktionspunkt liegt auf der Transformationskurve bzw.$B = B(A)$

In diesem Fall

$$\max\{m = 4A + 3B\} \quad \text{NB:} B = 2\sqrt{1 - A^2}$$

Wie in Mikro ergibt sich damit:

$$GRT = \frac{dB}{dA} = B'(A) = -\frac{p_A}{p_B} \quad \frac{2A}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{4}{3} \Longrightarrow 36A^2 = 16(1 - A^2) \Longrightarrow$$

$$52A^2 = 16 \Longrightarrow A^* = \sqrt{\frac{4}{13}} \quad B^* = 2\sqrt{\frac{9}{13}}$$

(f) Am Weltmarkt verdopple sich der Preis von $B$. Welcher neue Produktionspunkt ergibt sich nun für das Land, welches Gut wird exportiert, welches importiert?
Am einfachsten wieder über (geht natürlich auch über den Arbeitsmarkt!)

$$GRT = \frac{dB}{dA} = B'(A) = -\frac{p_A}{p_B^w} \quad \frac{2A}{\sqrt{1-A^2}} = \frac{4}{6} \Longrightarrow A^w = \sqrt{\frac{1}{10}} \quad B = 2\sqrt{\frac{9}{10}}$$

damit wird nun weniger $A$ produziert und somit importiert, während mehr $B$ produziert wird und damit exportiert (es besteht ein höherer Anreiz $B$ zu produzieren, da der Weltmarktpreis (relativ, hier auch absolut, weil nur ein Preis sich ändert!) über dem heimischen liegt!)

(g) Zeigen Sie grafisch, warum sich damit das Land allein unter der Annahme "mehr ist immer besser" mit der Öffnung für den Weltmarkt gegenüber der Autarkiesituation besser stellen kann.
Bei Handel können Konsumpunkt und Produktionspunkt auseinanderfallen und somit kann das Land einen Konsumpunkt rechts oberhalb des Autarkieproduktions-Konsumpunktes erreichen. (siehe Excel)

(h) Nehmen Sie an, in der ursprünglichen Fragestellung wäre $p_A = 12$ und $p_B = 9$ und ansonsten würde sich nichts ändern. Wie ändern sich dann die Antworten auf die Fragen?
Entscheidend ist in diesem Modell nur das relative Preisverhältnis zwischen den Gütern $A$ und $B$. Damit ändert sich an der Rechung nichts, denn der Faktor 3 kürzt sich einfach heraus.

3. Zwei Bankräuber werden beim Wegrennen gefasst. Die Anklage könnte sich aber nur auf vage Zeugenaussagen stützen, so dass beide nur aufgrund der bei Ihnen gefundenen Maschinenpistolen für 2 Jahre verurteilt werden könnten. In getrennten Verhören auf dem Polizeirevier wird jedem folgendes Angebot über die Kronzeugenregelung gemacht: Gesteht nur einer von beiden, so greift die Kronzeugenregelung, der Geständige verlässt als freier Mann das Gericht und der andere wird zu 9 Jahren verurteilt. Falls aber beide gestehen, liegen gegen beide Beweise vor, aber aufgrund mildernder Umstände werden beide nur zu 6 Jahren verurteilt.

(a) Stellen Sie die zugehörige spieltheoretische Auszahlungsmatrix auf.
Um die übliche Interpretation *je größer die Zahl desto besser* beizubehalten, verwenden wir [$-1\widehat{=}$ Jahr Gefängnis] als Nutzeneinheit:

| | | Räuber 2 | |
|---|---|---|---|
| | | schweigen | gestehen |
| Räuber 1 | schweigen | ( -2 ; -2 ) | ( -9 ; 0 ) |
| | gestehen | ( 0 ; -9 ) | ( -6 ; -6 ) |

(b) Untersuchen Sie die Situation ausführlich auf mögliche Nash-Gleichgewichte.

- Angenommen R2 schweigt ⇒ R1 geht 2 Jahre ins Gefängnis, wenn er auch schweigt und kommt frei, wenn er gesteht ⇒ R1 gesteht
- Angenommen R2 gesteht ⇒ R1 geht 6 Jahre ins Gefängnis, wenn er auch gesteht und 9 Jahre, wenn er schweigt ⇒ R1 gesteht
- Angenommen R1 schweigt ⇒ R2 geht 2 Jahre ins Gefängnis, wenn er auch schweigt und kommt frei, wenn er gesteht ⇒ R2 gesteht
- Angenommen R1 gesteht ⇒ R2 geht 6 Jahre ins Gefängnis, wenn er auch gesteht und 9 Jahre, wenn er schweigt ⇒ R2 gesteht

Damit ergibt sich ein eindeutiges Gleichgewicht in reinen Strategien mit dem gleichzeitigen Geständnis beider Räuber und einer jeweiligen Haftstrafe von 6 Jahren.

(c) Beurteilen Sie Ihr Ergebnis aus Sicht der Bankräuber unter dem Aspekt der Pareto-Effizienz.
Beide Räuber könnten sich besser stellen, wenn sie sich auf gleichzeitiges Schweigen geeinigt hätten und damit jeweils nur zu 2 Jahren verurteilt worden wären.

(d) Wie ist der Zustand Räuber 1 gesteht und Räuber 2 schweigt unter Pareto-Effizienz zu beurteilen?
Dieser Zustand ist pareto-effizient, da es keinen anderen Zustand gibt, in dem Räuber 1 nicht schlechter gestellt wird (der eine hat alles, der ander nix!).

(e) Wie viele pareto-effiziente Zustände gibt es in diesem Spiel?
3: (R1 gesteht: R2 schweigt) ; (R2 gesteht: R1 schweigt) : ((R1 schweigt: R2 schweigt))

(f) Nehmen Sie an, beide sind Mitglied der Mafia. Wie löst die Mafia das Problem des Gefangenendilemmas? Diskutieren Sie!
Die Mafia hat grundsätzlich kein Interesse daran, dass sich Ihre Mitglieder gegenseitig verpfeifen. Grundsätzlich gilt hier das Gesetz der Omertà. Dies kann man als externe spieltheoretische Lösung des Gefangenendilemmas ansehen, denn unabhängig von den verschiedenen Freiheitsstrafen in unserem Beispiel wird der externe Drohpunkt *ermordet zu werden* gesetzt, welcher die *Auszahlungen* derart manipuliert, so dass beide trotz der vorher beschriebenen Anreize mit großer Wahrscheinlichkeit schweigen werden.

(g*) Nehmen Sie an, ein Bankräuber (R1) hatte keine Waffe mit. Zudem hat der andere (R2) ein so langes Vorstrafenregister, so dass er nicht auf mildernde Umstände hoffen kann. Wie ändert sich die Auszahlungsmatrix, und was bedeutet das für mögliche Nash-Gleichgewichte? Diskutieren Sie!

| | | Räuber 2 | |
|---|---|---|---|
| | | schweigen | gestehen |
| Räuber 1 | schweigen | ( 0 ; -2 ) | ( -9 ; 0 ) |
| | gestehen | ( 0 ; -9 ) | ( -6 ; -9 ) |

- Angenommen R2 schweigt $\Rightarrow$ R1 kommt frei, egal ob er gesteht oder schweigt$\Rightarrow$ schweigen und gestehten sind optimal
- Angenommen R2 gesteht $\Rightarrow$ R1 geht 6 Jahre ins Gefängnis, wenn er auch gesteht und 9 Jahre, wenn er schweigt $\Rightarrow$ R1 gesteht
- Angenommen R1 schweigt $\Rightarrow$ R2 geht 2 Jahre ins Gefängnis, wenn er schweigt und kommt frei, wenn er gesteht $\Rightarrow$ R2 gesteht
- Angenommen R1 gesteht $\Rightarrow$ R2 geht 9 Jahre ins Gefängnis, egal ob er schweigt oder gesteht $\Rightarrow$ schweigen und gestehen sind optimal

Damit ergeben sich zwei Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien:

- Beide gestehen
- R2 schweigt und R1 gesteht

Natürlich machen sich beide in der Realität auch diese Gedanken, auch wenn sie nicht wissen, ob der jeweils andere das gleiche Angebot bekommen hat. In der weitergehenden Analyse kommt man dann zu gemischten Strategien, indem man den verschiedenen Strategien des jeweils anderen Wahrscheinlichkeiten zuordnet, diese werden wieder in subjektive und objektive eingeteilt usw...... aber das ist eine andere Geschichte :-)

4. Betrachten Sie zwei Länder mit identischer Produktion unter monopolistischer Konkurrenz. D.h. die Fixkosten betragen 10 und die Grenzkosten seien konstant bei 5. Der Preis in Abhängigkeit von der Firmenzahl $n$ sei dabei gegeben durch:

$$\text{Preis} = \text{Variable Stückkosten} + \frac{1}{n}$$

Des Weiteren soll der Markt des einen Landes doppelt so groß sein, wie der des anderen Landes

(a) Wie hoch sind dann die variablen Kosten in der Branche bei einer Produktion von 150 Stück?

Grenzkosten = Kosten der nächsten produzierten Einheit (1. Ableitung der Kostenfunktion). Sind diese konstant, so sind die variablen Stückkosten ebenfalls konstant bei 5 $\Rightarrow$ und die variablen Kosten bei $VK(x = 150) = 5 \cdot 150 = 750$.

(b) Bestimmen Sie für eine Marktgröße des kleinen Landes von $S_{kl} = 1000$ die CC-Kurve für beide Länder aus den Durchschnittskosten.

$$\text{Durchschnittskosten} = \frac{\text{Kosten}}{\text{Menge}} = \frac{\text{Kosten}}{\frac{\text{Marktgröße}}{\text{Firmenzahl}}} = \frac{\text{Fixkosten}}{\frac{\text{Marktgröße}}{\text{Firmenzahl}}} + \frac{\text{Variable Kosten}}{\frac{\text{Marktgröße}}{\text{Firmenzahl}}}$$

$$= \frac{\text{Fixkosten} \cdot \text{Firmenzahl}}{\text{Marktgröße}} + \text{Variable Stückkosten}$$

$$CC_{kl}: \quad DK = \frac{n \cdot 10}{1000} + 5$$

$$CC_{gr}: \quad DK = \frac{n \cdot 10}{2000} + 5$$

(c) Bestimmen Sie in beiden Ländern separat den gleichgewichtigen Preis und die zugehörige Firmenzahl.
Die PP-Kurve ist für beide gleich

$$PP: \quad p = 5 + \frac{1}{n}$$

*PP=CC* $\quad n_{kl} = 10 \quad p_{kl} = 5,1 \quad n_{gr} = \sqrt{200} \quad p_{gr} = 5 + \frac{1}{\sqrt{200}} \approx 5,07$

(d) Welches Marktgleichgewicht ergibt sich, wenn beide Länder ihre Grenzen öffen?
Die Marktgröße ist dann 3000
$n_w = \sqrt{300} \quad p_w = 10 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

(e) Wie ändern sich Preis und Firmenzahl, wenn durch einen Technologiesprung die Fixkosten in der Branche fallen?
Die Fixkosten stecken in der CC-Kurve. Fallen die Fixkosten, so dreht sich die CC-Kurve nach unten und damit sinkt der Preis und die Firmenzahl steigt im Gleichgewicht.

(f) Unterlegen Sie Ihre Argumentation mit einer Grafik
siehe Vorlesungsfolien monopolistische Konkurrenz