Tutorium 1

1. Gegeben sind folgende zwei Funktion:

$$F_1: \quad y = 4 + 3x \qquad F_2: \quad y = 5x$$

   (a) Stellen Sie beide Funktionen im Bereich $x \geq 0$ grafisch dar.
   Siehe Excel

   (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionen durch

      i. Gleichsetzen

$$F_1 = F_2 \Rightarrow 4 + 3x = 5x \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow 2 = x^* \Rightarrow y^* = 4 + 3 \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$$

      ii. das gaußsche Eliminationsverfahren
      Das Problem lässt sich folgendermaßen als lineares Gleichungssystem schreiben

$$\begin{array}{rcrcr} -3x & + & y & = & 4 \\ -5x & + & y & = & 0 \\ \hline -3x & + & y & = & 4 \\ 2x & & & = & 4 \end{array} \Big) -$$

$$\Rightarrow x^* = 2 \Rightarrow -3 * 2 + y^* = 4 \Rightarrow y^* = 10$$

      iii. die Cramersche Regel
      Das Problem lässt sich folgendermaßen in Vektorschreibweise darstellen:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

      oder Allgemein

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

      Für die Cramersche Regel benötigt man die Determinante von A

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - (-5) \cdot 1 = 2$$

      die Determinante von A_1 (ersetzen der 1. Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$)

$$detA_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 4$$

      die Determinante von A_2 (ersetzen der 2. Spalte von A durch den Vektor $\vec{b}$)

$$detA_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = -3 \cdot 0 - (-5) \cdot 4 = 20$$

und für die Lösungen von x und y erhält man

$$x^* = \frac{detA_1}{detA} = \frac{4}{2} = 2 \quad y^* = \frac{detA_2}{detA} = \frac{20}{2} = 10$$

Der Vorteil des gaußschen Eliminationsverfahren und der Cramerschen Regel ist, dass man diese Algorithmen leicht in höhere Dimensionen übertragen kann bzw. einfach programmieren kann. In der Vorlesung werden wir diese Lösungstechniken später im makroökonomischen IS-LM-Modell verwenden.

(c) Bestimmen Sie die Differenz der beiden Funktionen $F_2 - F_1$ und stellen Sie diese grafisch dar.

$$F_2 - F_1 = 5x - (4 + 3x) = -4 + 2x$$

Grafik siehe Excel

(d) Interpretieren Sie die beiden Funktionen und deren Differenz ökonomisch in der klassischen Unternehmenstheorie.
F_1 lässt sich als Kostenfunktion, abhängig vom Output x mit Fixkosten von 4, variablen Kosten von $3x$ bzw. marginalen Kosten von 3 interpretieren. F_2 kann man als den Umsatz eines Unternehmens mit einem Preis von 5 und Output x interpretieren und damit ergibt sich $F_2 - F_1 =$ Umsatz - Kosten $=$ Gewinn.

(e) Betrachten Sie folgende allgemeine Funktionen:

$$F_1: \quad y = a_1 + b_1 x \qquad F_2: \quad y = b_2 x \quad \text{mit } a_1, b_1, b_2 > 0$$

i. Warum stellt man vor dem Hintergrund der vorherigen ökonomischen Interpretation im Allgemeinen die Forderung $a_1, b_1, b_2 > 0$?
Ansonsten hätte man negative Preise, negative variable Kosten und negative Fixkosten. In unserer schönen neuen Welt haben wir es mittlerweile aber durchaus mit negativen Preisen zu tun, z.B. aufgrund der Einspeiseverordnung für erneuerbare Energien kann es bei einem sehr hohen Angebot zu einem negativen Strompreis kommen (seit 2008 ist dies explizit zugelassen!). Ebenso sind die negativen Zinsen für deutsche Staatsanleihen als negative Preise für Kredite zu interpretieren und zumindest Grenzkosten von null spielen bei den extrem hoch skalierbaren Produkten in der digitalen Welt (nahezu verschwindende Kopierkosten einer App) mittlerweile eine große Rolle in unserer Wirtschaft. Wir bleiben aber hier erst noch einmal im *klass. Bereich.*

ii. Welche Bedingung muss für b_1 und b_2 gelten, damit der Schnittpunkt beider Funktionen im positiven Bereich liegt?
b_1 ist die Steigung der Kostenkurve, b_2 ist die Steigung der Umsatzkurve. Steigt pro Einheit x der Umsatz weniger als die Kosten, kann bei posititven Fixkosten der Umsatz niemals die Kosten übersteigen, und es wird niemals einen Break-even-Punkt (Umsatz gleich Kosten) bei positivem Umsatz geben $\Rightarrow$ für die Existenz von Break-even muss $b_2 > b_1$ gelten. Das ist eben das Problem der Business Angel und des Venture Capital. Wir wissen eben nicht, welches Unternehmen nach 5 Jahren Break-even erreicht und dann durch die Decke geht. Deswegen kaufen die Jungs mit genügend Kapital eben gleich 10 von den Garagen-Unternehmen, wenn eins dann Instargram

ist, deckt das die Verluste die durch die anderen entstehen, wenn Facebook dann zuschlägt :-)

iii. Angenommen der Schnittpunkt von F_1 und F_2 liegt im positiven Bereich. Bestimmen Sie allgemein der Schnittpunkt von F_1 und F_2 und untersuchen Sie die Abhängigkeit des Schnittpunkts von den Parametern a_1, b_1, b_2. Stellen Sie die Abhängigkeiten auch grafisch dar.

$$a_1 + b_1 x = b_2 x \Rightarrow a_1 = (b_2 - b_1)x \Rightarrow x^* = \frac{a_1}{b_2 - b_1} \Rightarrow y^* = b_2 \frac{a_1}{b_2 - b_1}$$

ceteris paribus (es wird jeweils nur die Änderung eines Parameters betrachtet) ergibt sich damit (man beachte, dass $b_2 > b_1$ vorausgesetzt ist!):

$$\begin{array}{ccccc} a_1 \uparrow & \Rightarrow & x^* \uparrow & \Rightarrow & y^* \uparrow \\ b_1 \uparrow & \Rightarrow & x^* \uparrow & \Rightarrow & y^* \uparrow \\ b_2 \uparrow & \Rightarrow & x^* \downarrow & \Rightarrow & y^* \downarrow \end{array}$$

Grafik, siehe Excel

2. Gegeben ist folgende Zeitreihe:

Zeit	x
2015	103
2016	110
2017	97
2018	105
2019	121

(a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel von x.
Arithmetisches Mittel: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{5}(103 + 110 + 97 + 105 + 121) = 107,2$

(b) Bestimmen Sie die jährlichen Wachstumsraten von x.
Wachstumsrate$=\frac{\Delta x}{x}=\frac{x_{i+1}-x_i}{x_i} = \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$

Zeit	x	Wachstumsrate
2015	103	–
2016	110	$\frac{110-103}{103} \approx 6,8\%$
2017	97	$\frac{97-110}{110} \approx -11,82\%$
2018	105	$\frac{105-97}{97} \approx 8,25\%$
2019	121	$\frac{121-105}{105} \approx 15,24\%$

(c) Bestimmen Sie das durchschnittliche Wachstum von x zwischen 2015 und 2019 über

i. das arithmetische Mittel der jährlichen Wachstumsraten

$$\frac{1}{4}(6,8\% - 11,82\% + 8,25\% + 15,24\%) \approx 4,62$$

ii. das geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren. Was fällt auf? Das geometrische Mittel ist gegeben durch:

$$\bar{x}_{geo} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

Zur Bestimmung einer durchschnittlichen Wachstumsrate macht man folgendes Gedankenexperiment:
Mit welcher konstanten Rate g muss ein Wert wachsen, damit er ausgehend von A_0 nach n Perioden den Wert A_n erreicht (genauso wie bei der Zinseszinsrechnung!). Damit erhält man folgende Gleichung:

$$A_0(1+g)^n = A_n \Rightarrow g = \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} - 1$$

A_n ergibt sich allerdings auch aus den jeweiligen konkreten Wachstumsraten in den jeweiligen Jahren:

$$A_1 = A_0 = (1+g_1)\ A_2 = A_1 = (1+g_2) ...\ A_n = A_{n-1} = (1+g_n)$$

$$\Rightarrow A_n = A_0(1+g_1)(1+g_2)...(1+g_n)$$

und somit der allgemeine Zusammenhang für die durchschnittliche Wachstumsrate g und den konkreten Wachstumsraten g_i:

$$A_0(1+g)^n = A_n = A_0(1+g_1)(1+g_2)...(1+g_n) \Rightarrow (1+g)^n = (1+g_1)(1+g_2)...(1+g_n)$$

$$\Rightarrow 1+g = \sqrt[n]{(1+g_1)(1+g_2)...(1+g_n)} = \sqrt[n]{\frac{A_1}{A_0}\frac{A_2}{A_1}...\frac{A_n}{A_{n-1}}}$$

$$\Rightarrow g = \sqrt[n]{(1+g_1)(1+g_2)...(1+g_n)} - 1 = \sqrt[n]{\frac{A_1}{A_0}\frac{A_2}{A_1}...\frac{A_n}{A_{n-1}}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{A_n}{A_0}} - 1$$

Eine durchschnittliche Wachstumsrate ergibt sich damit als das geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren minus 1. Dies ist insbesondere wichtig, wenn die Veränderungsraten betraglich größer als 10% sind, denn dann weicht im Allgemeinen die geometrische (richtige!) Mittelung deutlich von der gängigen (und leider in vielen BWL-Leerbücher ausschließlich genannten) arithmetischen Mittelung ab.

(d) Geben Sie eine ökonomische Interpretation der Daten.
Solch eine Zeitreihe kann nahezu jede ökonomische Kennzahl repräsentieren (je nach gewähler Einheit): Umsatz, Kosten, Mitarbeiter, Aktienkurs, BIP-Index, Preisindex, ... insbesondere Indices werden häufig so normiert, dass die aktuellen Werte in der Nähe von 100 liegen.

3. Gegeben ist folgende Zahlenreihe:

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + ...$$

(a) Wie wird sich die Reihe fortsetzen?
Klammert man die 2 aus erhält man

$$2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + ...) = 2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + ...\right)$$

somit kann die Reihe sinnvoll mit $\frac{2}{243} = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$ fortgesetzt werden.

(b) Wie nennt man diese Art von Zahlenreihe? Eine solche Zahlenreihe nennt man geometrische Reihe.

(c) Berechnen Sie die Summe $A_4 = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81}$
Allgemein lässt sich z.B. per vollständiger Induktion zeigen:

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}$$

Damit ergibt sich für unser Beispiel

$$2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} = 2\left(\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4\right) =$$

$$\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{4+1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} = 3\frac{242}{243} \approx 2,98765$$

(d) Was ergibt sich, wenn man die Reihe ins Unendliche fortsetzt?
da der Term $\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}$ für immer größeres N immer kleiner wird und im Grenzwert verschwindet, ergibt sich für die Reihe

$$2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{2}{81}+...=2\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=3$$

(e) Was ergibt sich allgemein für die Reihe?

$$A_N=\sum_{n=0}^{N} q^n \quad \text{bzw.} \quad A_\infty=\sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad 0<q<1$$

Für $0<q<1$ verschwindet allgemein der Wert q^{N+1} für N gegen unendlich und somit gilt allgemein:

$$A_\infty=\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\frac{1}{1-q}$$

Setzt man die Existenz des Grenzwerts c dieser Reihe voraus und geht etwas lax mit Unendlichkeiten um lässt sich dies auch folgendermaßen motivieren:

$$1+q+q^2+...=c=1+q(\underbrace{1+q+q^2+...}_{c})=1+qc \Rightarrow c-qc=c(1-q)=1 \Rightarrow c=\frac{1}{1-q}$$

(f) Geben Sie ökonomische Anwendungen für diese Art von Zahlenreihen?
Die geometrische Reihe bildet quasi die fundamentale Grundlage aller Wachstumsprozesse, die alle Nase lang in der Ökonomie vorkommen. Konkrete Beispiele sind der Kapitalaufbau bei konstanter Dividende, Barwertberechnung bei konstantem Zinssatz bzw. konstantem Diskontfaktor, Rentenrechnung, Annuitätendarlehen, ... Mit der Konvergenz im Unendlichen bekommen wir allerdings bei negativen Zinsen Probleme, denn $\frac{1}{1+\text{Zinssatz}}$ als Diskontfaktor ist bei negativem Zinssatz leider größer als 1.