Aufgabe 1a

Vergleiche mit der allgemeinen Herleitung der Samuelson-Bedingung. Letztlich ist es nur ein Einsetzen der expliziten funktionalen Zusammenhänge! Einfach mal daneben legen!
Man maximiert den Nutzen von A:

$$u_A(x_A, G) = x_A \cdot G^2$$

unter der Nebenbedingung, dass sich der Nutzen von B nicht ändert

$$u_B(x_B, G) = x_B \cdot G^2 = \bar{u}_B$$

($\bar{u}_B$ ist eine feste Zahl!)

und der allgemeinen Ressourcenbeschränkung:
$y_A = y_B = y = 1 \Rightarrow$ Es gibtalso ein Gesamteinkommen von $y_A + y_B = 2$. Dieses wird für x_A, x_B und G ausgeben, wobei G eine Einheit $(c = 1)$ von x kostet. Die Budgetbeschräkung lautet dann:

$$x_A + x_B + G = 2$$

Das Maximierungsproblem ergibt sich dann zu

$$\max x_A G^2 \quad NB1 : x_B G^2 = \bar{u}_B \quad NB2 : \quad x_A + x_B + G = 2$$

und die Lagrangfunktion zu

$$L(x_A, x_B, G, \mu, \lambda) = x_A G^2 + \mu(x_B G^2 - \bar{u}_B) + \lambda(2 - x_A - x_B - G)$$

Als partielle Ableitungen und anschließendes Nullsetzes für die Maximierung von L erhält man (Bitte erst einmal selber versuchen!!!)

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = G^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \qquad G^2 = \lambda \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_B} = \mu G^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \qquad \mu G^2 = \lambda \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 2x_A G + \mu 2 x_B G - \lambda = 0 \Rightarrow \quad 2x_A G + 2\mu x_B G = \lambda \tag{3}$$

Die Ableitungen nach μ und λ und "Nullsetzen" ergeben natürlich einfach wieder nur die beiden Nebenbedingungen NB1 und NB2:

$$NB1: x_B G^2 = \bar{u}_B \quad NB2: 2 = x_A + x_B + G$$

Es geht wieder darum aus dem Gleichungssystem λ und μ zu eliminieren.
Aus (1) haben wir schon $G^2 = \lambda$
Teilen von (1):(2) liefert

$$\frac{G^2}{\mu G^2} = 1 \quad \Rightarrow 1 = \mu \tag{4}$$

Einsetzen von $\mu = 1$ und $\lambda = G^2$ in (3) liefert

$$2x_A G + 2x_B G = G^2 \Rightarrow 2(x_A + x_B) = G \tag{5}$$

Vgl. mit dem direkten Einsetzen in die allgemeine Samuelsonbedingung!

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial G}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}} + \frac{\frac{\partial u_B}{\partial G}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = c \Rightarrow \frac{2x_A G}{G^2} + \frac{2x_B G}{G^2} = 1 \tag{6}$$

(5) und die Ressourcenbeschränkung

$$2(x_A + x_B) = G \Rightarrow 2 - G = x_A + x_B$$

$$2 = x_A + x_B + G \Rightarrow 2 - G = x_A + x_B$$

ergeben dann

$$2(2 - G) = G \Rightarrow 4 - 2G = G \Rightarrow 4 = 3G \Rightarrow G^* = \frac{4}{3}$$

Aufgabe 1b

Was ändert sich im Optimierungsansatz? A schaut nur auf sein eigenes Budget $y_A = 1$,welches er für seinen Anteil an der Finanzierung G_A am öffentlichen Gut und das private Gut x_A ausgibt $\Rightarrow x_A + G_A = 1$.Das Nutzeenniveau von B interessiert jetzt nicht mehr, aber A geht davon aus, dass B eine feste Menge G_B des öffentlichen Gutes finanziert. Das bedeutet, dass A die Menge von $G = G_A + G_B$ konsumieren kann, denn die jeweils finanzierten Mengen G_A und G_B können gleichzeitig (nicht Ausschließbarkeit, nicht Rivalität im Konsum) auch durch das jeweils andere Indivuum genutzt werden. Das individuelle Maximierungsproblem ergibt sich damit zu

$$\max x_A (G_A + G_B)^2 \quad NB : x_A + G_A = 1$$

und die Lagrangefunktion zu

$$L(x_A, G_A, \lambda) = x_A (G_A + G_B)^2 + \lambda (1 - x_A - G_A)$$

Beachten Sie, dass für A die Menge G_B eine feste Zahl ist! Vgl. Spieltheorie: Ich optimiere mein Verhalten, gegeben das Verhalten der anderen!

Die Optimierung läuft wieder über das Nullsetzen der partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial x_A} = (G_A + G_B)^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \quad (G_A + G_B)^2 = \lambda \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 2x_A(G_A + G_B) - \lambda = 0 \Rightarrow \quad 2x_A(G_A + G_B) = \lambda \tag{8}$$

und der Ressourcenbeschränkung

$$x_A + G_A = 1 \Rightarrow x_A = 1 - G_A \tag{9}$$

Wieder teilen wir (7):(8) und erhalten:

$$\frac{(G_A+G_B)^2}{2x_A(G_A+G_B)} = 1 \Rightarrow 2x_A = G_A + G_B$$

Einsetzen der Ressourcenbeschränkung (9) liefert dann

$$2x_A = 2(1-G_A) = 2-2G_A = G_A+G_B \Rightarrow 2 = 3G_A+G_B \Rightarrow$$

$$3G_A = 2-G_B \Rightarrow G_A(G_B) = \frac{1}{3}(2-G_B)$$

Dies ist die sogenannte Reaktionsfunktion von A, gegeben die von B bereitgestellte Menge G_B.

$$G_A(G_B) = \frac{1}{3}(2-G_B)$$

Dies ist der gleiche Formalismus wie beim Cournotwettbewerb, den Sie in Mikro kennengelernt haben, wenn zwei Anbieter sich einen Markt aufteilen und jeweils den eigenen Gewinn maximieren, gegeben die Menge des anderen.

Da B die gleiche Nutzenfunktion $u_B = x_B G^2$ und das gleiche Budget $y_B = 1$ hat, läuft der Optimierungsprozess für B identisch ab. Für die Bestimmung der Reaktionsfunktion von B müssen wir damit nur die Indices A und B vertauschen! Reaktionsfunktion B

$$G_B(G_A) = \frac{1}{3}(2 - G_A)$$

Da beide Individuen sich gleichzeitig nutzenmaximierend verhalten, und sie sich gemäß ihrer Reaktionsfunktionen verhalten, ist damit folgendes lineares Gleichungssystem in den Variablen G_A und G_B zu lösen:

$$G_A = \frac{1}{3}(2 - G_B) \tag{10}$$

$$G_B = \frac{1}{3}(2 - G_A) \tag{11}$$

Dies können Sie über das Einsetzungsverfahren, das Gaußsche Eliminationsverfahren oder die Cramersche Regel, was Sie alles aus der Schule und aus der Wirtschaftsmathematik kennen, lösen:

Einsetzungsverfahren:

$$G_A = \frac{1}{3}(2 - G_B) = \frac{1}{3}(2 - \frac{1}{3}(2 - G_A)) \Rightarrow 3G_A = 2 - \frac{1}{3}(2 - G_A) \Rightarrow$$

$$2 - 3G_A = \frac{1}{3}(2 - G_A) \Rightarrow 6 - 9G_A = 2 - G_A \Rightarrow 4 = 8G_A \Rightarrow G_A^+ = \frac{1}{2}$$

$$G_B^+ = \frac{1}{3}(2 - G_A^+) = \frac{1}{3}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow G^+ = G_A^+ + G_A^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Aufgabe 1c

Damit wird

$$G^{+} = G_A^{+} + G_A^{+} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 < \frac{4}{3} = G^{*}$$

unter egoistischer Nutzenmaximierung $G^{+} = 1$ weniger des öffentlichen Gutes bereitgestellt, als die pareto-effiziente Menge $G^{*} = \frac{4}{3}$.
Die pareto-effiziente Menge könnte z.B. über die Besteuerung der Individuen oder eine direkte Verpflichtung zur Finanzierung des öffentlichen Gutes erreicht werden.